Gewone differentiaalvergelijkingen

Cursus 2002-2003.

Tweede hertentamen, 21 augustus 2003, duur: 3 uur.

Licht je antwoorden bondig toe; geef bijvoorbeeld aan welke oplossingsmethode of welke stelling je gebruikt.

1.[1] (a)[3] Los op: de Bernoulli vergelijking $y' = -2\dfrac{y}{x} + xy^2, y(1) = 1$.
(b)[3] Los op: $(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$, $y(0) = 1$, met integrerende factor van de vorm $\varphi(xy)$.
(c)[3] Toon aan dat $f(x, y) = \sin xy$ op $\mathbb{R}^2$ locaal Lipschitz continu is in y.

2.[1] (a)[3] Bepaal met behulp van Picard iteratie de oplossing van $y' = \dfrac{y}{x} + 1$, $y(1) = 1$.
(b)[6] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen: $x' = -xy$, $y' = x - 1$. Geef een differentiaalvergelijking voor de banen en los deze op. Maak vervolgens een faseplaatje, inclusief de doorlooprichtingen.

3.[1] (a)[6] Los op:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b)[3] Los op: $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5\frac{1}{2}$.

4.[1] (a)[3] Zij $A(x)$ een continue periodieke $n \times n$-matrixfunctie op $\mathbb{R}$ met periode T. Stel alle oplossingen van de differentiaalvergelijking $y' = A(x)y$ zijn periodiek met periode T. Bewijs $\int_0^T \operatorname{sp} A(x)dx = 0$ (Aanwijzing: Gebruik dat de Wronskiaan $W(x)$ voldoet aan $W' = \operatorname{sp} A(x)W$.)
(b)[6] Los op met behulp van de Greense functie:

$$y'' = f(x), \quad y(-1) = 1, \quad y(1) = -1.$$